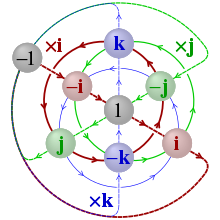


**Quaternionen**

**Ausarbeitung im Fach Computergrafik**



Modul Computergrafik

Abgabedatum 30.05.2021

Matrikelnummern 1 3886565

Matrikelnummern 2 2227134

Matrikelnummern 3 9125264

Inhaltsverzeichnis

[1 Einleitung 2](#_Toc73243917)

[2 Mathematische Grundlagen 2](#_Toc73243918)

[2.1 Definition und Konstruktion 2](#_Toc73243919)

[2.2 Addition von Quaternionen 3](#_Toc73243920)

[2.3 Multiplikation von Quaternionen 4](#_Toc73243921)

[2.4 Konjugation von Quaternionen 4](#_Toc73243922)

[2.5 Betrag von Quaternionen 5](#_Toc73243923)

[2.6 Inverse von Quaternionen 5](#_Toc73243924)

[3 Rotation 5](#_Toc73243925)

[3.1 Polarform von Quaternionen 5](#_Toc73243926)

[3.2 Definition einer Rotation 5](#_Toc73243927)

[3.3 Beispiel einer einfachen Rotation 5](#_Toc73243928)

[3.4 Die Rotationsmatrix für Quaternionen 6](#_Toc73243929)

[4 Wiederholung: Gimbal Lock 6](#_Toc73243930)

[4.1 Wiederholung: Eulerwinkel 6](#_Toc73243931)

[4.2 Problem mit Freiheitsgraden 6](#_Toc73243932)

[5 Vor- und Nachteile 6](#_Toc73243933)

[5.1 Vorteile von Quaternionen 6](#_Toc73243934)

[5.2 Nachteile von Quaternionen 6](#_Toc73243935)

[6 Quellen 6](#_Toc73243936)

# Einleitung

Die Grundlagen für die Quaternionen wurden von dem irischen Mathematiker William Hamilton im Jahre 1843 gelegt. Er war auf der Suche nach einer dreidimensionalen Erweiterung für die komplexen Zahlen. Er hatte jedoch das Problem, dass er Tripel nicht multiplizieren konnte und es nicht so einfach schien wie bei der Multiplikation von Tupeln bei den komplexen Zahlen. Erst nachdem er eine vierte Dimension einführte, war er in der Lage eine Multiplikation durchzuführen. Zu diesem Zeitpunkt waren die reinen Quaternionen geboren, wurden jedoch eine lange Zeit nicht genutzt. Erst einige Zeit später hat der Professor Gibbs aus Yale die Idee wieder aufgegriffen und hat darauf aufbauend das Vektor und Skalarprodukt für Quaternionen definiert. Das bedeutet, dass Quaternionen aus einem skalaren Teil s und einem vektoriellen Teil (oder in der Form ) bestehen. Somit konnte man diesen Teil als heutigen Vektor interpretieren.

# Mathematische Grundlagen

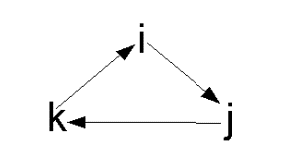
Im folgenden Kapitel werden zunächst allgemeine mathematische Grundlagen wie die Definition, die Konstruktion und das Rechnen mit Quaternionen vorgestellt.

## Definition und Konstruktion

Eine Quaternion besteht aus einem realen Teil und einem imaginären Teil. In den verschiedenen Lektüren werden zwei unterschiedliche Darstellungsformen verwendet, welche nachfolgend vorgestellt werden. Die Quaternion ist ein 4-Tupel und hat in der folgenden Darstellung den Realteil und den Imaginärteil :

Zudem gibt es aber noch eine weitere Schreibweise, welche den Imaginärteil als Vektor darstellt. Hierbei wird schnell die Verbindung zum dreidimensionalen Vektor für Koordinaten ersichtlich:

Bei den imaginären Größen gibt es zudem einen wichtigen mathematischen Zusammenhang, welcher durch ein Dreieck dargestellt werden. Es zeigt die Rechenregeln für die imaginären Anteile:



Für die Berechnungen des Imaginärteils gilt wie bei den komplexen Zahlen auch, dass das Quadrat der imaginären Anteile ergibt. In Formeln ausgedrückt bedeutet das:

Wenn man die Pfeilrichtungen beachtet, ergeben sich so noch folgende Zusammenhänge:

Wenn man allerdings in die entgegengesetzte Richtung geht, erhält man das Ergebnis der Multiplikation jeweils mit einem negativen Vorzeichen dazu:

Daraus wird ersichtlich, dass so zum Beispiel gilt und der Körper der Quaternionen nicht kommutativ ist. Hierbei spricht man von einem sogenannten Schiefkörper.

Als nächstes werden die einzelnen Rechenregeln für Quaternionen dargestellt.

## Addition von Quaternionen

Bei Quaternionen ist die Addition wie folgt definiert und funktioniert nach demselben Prinzip wie bei den komplexen Zahlen. Es werden Real- und Imaginärteil jeweils separat addiert.

Der Beweis für die Addition sieht wie folgt aus:

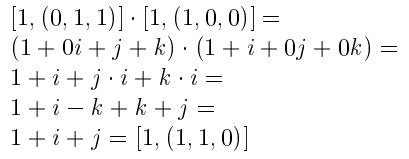
Als nächstes soll noch ein kleines Beispiel gegeben werden. Hierbei wird die Schreibweise mit dem Vektor als Imaginärteil verwendet:

## Multiplikation von Quaternionen

Nun wird die interessante Multiplikation von Quaternionen definiert. Da die Imaginärteile nicht kommutativ sind ergibt sich für die Multiplikation zweier Quaternionen folgende Formel:

Auch hierfür wieder der Beweis für die Gültigkeit der Formel:

Nachfolgend ist zudem noch ein einfaches Beispiel dargestellt:



## Konjugation von Quaternionen

Die Konjugation von Quaternionen ist wie folgt definiert:

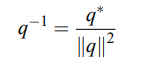
Hierfür auch wieder ein einfaches Beispiel:

## Betrag von Quaternionen

Wie bei den komplexen Zahlen kann bei den Quaternionen der Betrag berechnet werden. Dabei wird die Länge von Quaternionen berechnet. Der Betrag ist wie folgt definiert:

Zudem wird die Quaternion q auch Einheitsquaternion genannt, wenn der Betrag von q gleich 1 ist:

## Inverse von Quaternionen



# Rotation

## Polarform von Quaternionen



## Definition einer Rotation

## Beispiel einer einfachen Rotation

## Die Rotationsmatrix für Quaternionen

# Wiederholung: Gimbal Lock

## Wiederholung: Eulerwinkel

## Problem mit Freiheitsgraden

# Vor- und Nachteile

## Vorteile von Quaternionen

## Nachteile von Quaternionen

# Quellen

<https://www.uni-koblenz.de/~cg/veranst/ws0001/sem/Bartz.pdf>

<https://www.uni-koblenz.de/~cg/veranst/ws0001/sem/Lust_quaternion.pdf>

<https://web.mit.edu/2.998/www/QuaternionReport1.pdf>

<https://www.gamasutra.com/view/feature/131686/rotating_objects_using_quaternions.php>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion>